E.N.S.I. 1985 Option M

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. : Il est demandé EXPRESSÉMENT *aux candidats de donner des démonstrations* CLAIRES, CONCISES *et* RIGOUREUSES. *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.*

Les candidats doivent respecter les notations du texte.

Les différentes parties n'étant pas totalement indépendantes, il est conseillé de les traiter dans l'ordre indiqué.

NOTATIONS

Pour tout espace vectoriel réel de dimension finie E on note :

$\mathcal{L}(E)$: l'algèbre des endomorphismes d'espace vectoriel de E.

$\mathcal{GL}(E)$: le groupe des automorphismes d'espace vectoriel de E.

On utilise l'abréviation det pour déterminant.

Par exemple :

$\det(f)$: désigne le déterminant de l'endomorphisme f ;

$\det(M)$: désigne le déterminant de la matrice M ;

$\det(u_1, \ldots, u_n)$: désigne le déterminant des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans une base donnée.

Lorsque φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on note :

$$\mathcal{O}(\varphi) = \{ f \in \mathcal{GL}(E) \ / \ \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \text{ pour tout } x, y \text{ de } E \}$$

$$\mathcal{O}^+(\varphi) = \{ f \in \mathcal{O}(\varphi) \ / \ \det(f) = 1 \}$$

I

Dans cette partie on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B}_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et Φ_1, Φ_2, Φ_3 les trois formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Phi_1(x) = x_1^2 \ ; \qquad \Phi_2(x) = x_1 x_2 \ ; \qquad \Phi_3(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, x_2)$$

1° Déterminer les formes bilinéaires symétriques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ associées respectivement à Φ_1, Φ_2, Φ_3.
Écrire les matrices de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

2° Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}_0$ des éléments de $\mathcal{O}(\varphi_i)$ et $\mathcal{O}^+(\varphi_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

3° Soient φ et φ', deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un automorphisme p de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $p \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$) tel que :

$\varphi(p(x), p(y)) = \varphi'(x, y)$ pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que, pour r élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i. $r \in \mathcal{O}^+(\varphi')$

ii. $p \circ r \circ p^{-1} \in \mathcal{O}^+(\varphi)$

En déduire que les groupes $\mathcal{O}^+(\varphi)$ et $\mathcal{O}^+(\varphi')$ sont isomorphes.

4° Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$, différente de la forme nulle (on note Φ la forme quadratique associée à φ).

a. Montrer que $\mathcal{O}^+(\varphi) = \mathcal{O}^+(-\varphi)$.

b. Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que les groupes $\mathcal{O}^+(\varphi)$ et $\mathcal{O}^+(\varphi_i)$ soient isomorphes. (On étudiera différents cas suivant la signature de Φ.)

II

Dans toute la suite du problème, A désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et $\mathcal{B}_A = \{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$ la base de A constituée des matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On note : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ l'unité de A et J la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Soit Φ une forme quadratique sur A, différente de la forme nulle et telle que, pour tous X, Y de A, on a

$$\Phi(XY) = \Phi(X)\,\Phi(Y).$$

On note φ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ.

1° *a.* Calculer $\Phi(I)$, $\Phi(P_2)$, $\Phi(P_3)$, $\Phi(P_1 P_4)$.

b. Montrer que, si X est un élément de A, inversible, alors, on a $\Phi(X) \neq 0$.

c. Montrer que, si X est un élément de A, non inversible, alors, il satisfait à l'une des deux propriétés suivantes :

i. $X^2 = 0$.

ii. il existe P élément de A, inversible, et il existe α réel non nul tels que $X = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \alpha P_1$ ou $D = \alpha P_4$.

En déduire que $\Phi(X) = 0$.

d. Calculer $\varphi(I, J)$ et $\Phi(J)$.

2° *a.* Déterminer la matrice H de φ dans la base $\mathcal{B}_A$.

b. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice H.

3° Déterminer une base de A orthogonale pour φ.

Écrire la matrice de φ dans cette base.

III

On note $\mathcal{B} = \{ I, J, K, L \}$ la base de A constituée par les matrices suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On note Δ l'application de A dans $\mathbb{R}$, qui à toute matrice M de A associe son déterminant.

1° Montrer que Δ est une forme quadratique sur A.

Déterminer la matrice D_0 de Δ dans la base $\mathcal{B}$.

Dans toute la suite, on note δ, la forme bilinéaire symétrique associée à Δ.

2° Exprimer, dans la base $\mathcal{B}$, les matrices J^2, K^2, L^2, JK, KJ, JL, LJ, KL, LK.

En déduire l'expression, dans la base $\mathcal{B}$, du produit de deux éléments M et N de A. (On prendra $M = xI + yJ + zK + tL$ et $N = x'I + y'J + z'K + t'L$).

3° Soit u un élément de $\mathcal{L}(A)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. Pour tout M de A $\quad M.u(M) = \Delta(M)\, I$

ii. Pour tous M, N de A $\quad M.u(N) + N.u(M) = 2\,\delta(M, N)\, I$

4° *a.* Montrer qu'il existe un unique élément c de $\mathcal{L}(A)$ tel que :

$$M.c(M) = \Delta(M)\, I \qquad \text{pour tout M de A}$$

Déterminer la matrice C de c dans la base $\mathcal{B}$.

Dans toute la suite, on utilisera la notation $c(M) = \tilde{M}$.

b. Que représente la matrice $\tilde{M}$ pour la matrice M.

c. Montrer que, pour tous M, N de A, on a :

$$\widetilde{MN} = \tilde{N}\,\tilde{M}$$

$$\delta(\tilde{M}, \tilde{N}) = \delta(M, N)$$

5° Soit $M_0 = x_0 I + y_0 J + z_0 K + t_0 L$ un élément de A, non nul.

a. Déterminer $\{ N \in A \ / \ \widetilde{M_0 N} = \tilde{M}_0 \tilde{N} \}$

b. Déterminer $\{ N \in A \ / \ M_0 N + N M_0 = -2\,\delta(M_0, N)\, I \}$

IV

Dans cette partie les notations de la partie III sont conservées. On note A_1 le sous-espace vectoriel de A de base $\mathcal{B}_1 = \{ J, K, L \}$ et δ_1 la forme bilinéaire symétrique restriction de δ à A_1.

1° Montrer que, si M est un élément de A, on a

$$M \in A_1 \Leftrightarrow \tilde{M} = -M$$

Exprimer dans la base $\mathcal{B}$, la valeur de M^2, lorsque M est un élément de A_1.

2° Soient M, N, P des éléments de A_1.

a. Calculer :

$$\delta(M, N^2), \qquad \delta(M, MN) \qquad \text{et} \qquad \delta(M, NM)$$

b. En déduire que :

$\delta(M, NP) = -\det(M, N, P)$ où $\det(M, N, P)$ désigne le déterminant de la matrice des composantes de M, N, P sur la base $\mathcal{B}_1$.

3° Soit s un élément de $\mathcal{L}(A)$ tel que $s(I) = I$. On utilisera les notations :

$$J' = s(J) \qquad K' = s(K) \qquad L' = s(L)$$

a. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. s est un élément de $\mathcal{O}(\delta)$

ii. A_1 est stable pour s

et $\exists\, \varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que les relations suivantes sont vérifiées :

$$(R_\varepsilon) \begin{cases} J'^2 = -K'^2 = L'^2 = I \\ J'K' = -K'J' = \varepsilon L' \\ J'L' = -L'J' = \varepsilon K' \\ K'L' = -L'K' = \varepsilon J' \end{cases}$$

b. Montrer que, si A_1 est stable pour s et si s_1 désigne la restriction de s à A_1 les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. s_1 est un élément de $\mathcal{O}^+(\delta_1)$

ii. les relations suivantes sont vérifiées :

$$(R_1) \begin{cases} J'^2 = -K'^2 = L'^2 = I \\ J'K' = -K'J' = L' \\ J'L' = -L'J' = K' \\ K'L' = -L'K' = J' \end{cases}$$

4° Soit $\mathcal{X}(A)$ l'ensemble des automorphismes d'algèbre de A.

a. Montrer que, pour tout s de $\mathcal{X}(A)$, on a :

i. $s(I) = I$

ii. A_1 est stable pour s

iii. la restriction s_1 de s à A_1 est un élément de $\mathcal{O}^+(\delta_1)$

b. Montrer que l'application $s \to s_1$ de $\mathcal{X}(A)$ dans $\mathcal{O}^+(\delta_1)$ est un isomorphisme de groupe.

5° *a.* Soit r un élément de $\mathcal{O}^+(\delta_1)$. Montrer que 1 est valeur propre de r.

b. Montrer que, si M est un élément de A_1 tel que $M^2 \neq 0$, alors $G = \{ r \in \mathcal{O}^+(\delta_1) \;/\; r(M) = M \}$ est un groupe isomorphe à $\mathcal{O}^+(\varphi_3)$ (resp. $\mathcal{O}^+(\varphi_2)$) si $\Delta(M) > 0$ (resp. $\Delta(M) < 0$)).